Kalem Eğitim ve İnsan Bilimleri Dergisi 2017, 7 (1), 159-182, DOI: 10.23863/kalem.2017.79

Makale Gönderim Tarihi:03.03.2016 *Makale Kabûl Tarihi:30.12.2016*

Kâğıt Şeritle Düzgün Beşgen Origamisi: Öğrenci Cevaplarının Matematiksel Düşünce Açısından İçerik Analizi

Yrd. Doç. Dr. Özlem ÇEZİKTÜRK-KİPEL

Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, İstanbul / Türkiye

Öz

Araştırma bir devlet üniversitesindeki 18 ilköğretim aday matematik öğretmenine uygulanmıştır. Matematik ve sanat dersi kapsamında dikdörtgen şeritle beşgen çıkarılan bir origami sorusuyla karşılaştıklarında "Neden düzgün beşgen?" sorusuna verdikleri cevapların matematiksel düşünce açısından içerik analizi yapılmıştır. Araştırma yöntemi durum değerlendirmesine bağlı içerik analizi olarak belirlenmiştir. Matematiksel düşünce Schoenfeld (1992), Wares (2016), Alkan ve Bukova-Güzel (2005), Kahramaner ve Kahramaner (2002) ve Yıldırım (2004)'ın tarifleri doğrultusunda şekilli ve şekilsiz usa vurma, tahmin, tümevarım, genelleme, örnekleme, kavramlarla ve arası bağlantılarla düşünme ve matematiksel düşünce adımları şeklinde ve belli bölümlere ayrılmış şekilde tanımlanmıştır. Aday öğretmenlerin açıklamasında kullandığı matematiksel kavramlar ve sıklıkları listelenmiş, en çok ve en az kullanı-

* Sorumlu Yazar. Tel: +90 537 765 39 70 E-posta:ozlem.cezikturk@marmara.edu.tr ORCID: 0000-0001-7045-6028

 ISSN: 2146-5606

lanlar kadar her bireyin farklılıkları da gösterilmiştir. Gösterim şekillerindeki çeşitliliğin açıklamaya nasıl yansıdığı ve bunun kavram bilgisiyle birlikte matematiksel düşünceyi nasıl şekillendirdiği incelenmiştir. Hatalı, eksik ve örnek cevaplar belirlenmiştir. Geometrik kavramları, gösterim çeşitliliğini, şekil ile etkileşimi matematiksel düşünce açısından nasıl kullandıkları incelenmiştir. Sonuçlar hem matematik öğretiminde origaminin farklı şekillerde kullanımı konusunda hem de matematiksel düşünceyi kavram bilgisi, gösterim yolları çeşitliliği ve düşünce adımları şeklinde incelemeye yardımcı olacaktır. Araştırma matematiksel düşüncenin nasıl kâğıda döküldüğünün belirlenmesinde de faydalı olacaktır. Origami ile hipotez oluşturma bile çalışılabilir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel düşünce; Origami ile matematik öğretimi; Kavramsal öğrenme; Gösterim yolları; Dönüşüm geometrisi.

Regular Pentagon Origami By Rectangle Paper Strip: Content Analysis Of Student Answers On Mathematical Thinking

Abstract

The study was executed to 18 elementary mathematics teachers in a public university. During the course of Mathematics and Art, students created regular pentagon from a rectangle paper strip in the origami section of the course. They were asked why a regular pentagon happens through a knot of the paper strip. Then their answers were analyzed for mathematical reasoning. The study method was decided as content analysis depending on case evaluation. Mathematical reasoning was defined as reasoning with shapes or without shapes, guessing, induction, generalization, example finding, and thinking with concepts and with their connections in line with the definitions of Schoenfield (1992), Wares (2016), Alkan and Bukova-Güzel (2005), Kahramaner and Kahramaner (2002) ve Yıldırım (2004). Mathematical reasoning was thought to happen via thinking steps and divided into some parts. The concepts used by preservice mathematics teachers were listed, their use frequencies were reported. Teachers who used that particular concept and the degree to what it was used, were analyzed. Representational modes and how it affects the explanations as well as how they shape mathematical reasoning were reported. Faulty answers, incomplete answers and correct answers were noted for the lines of reasoning. Geometrical concepts, different modes of representation, interaction with shapes were searched for mathematical reasoning. The results of the study are thought to shape how origami can be used inside the mathematics classroom, how concept knowledge, representational mode variety, and lines of reasoning acts in mathematical reasoning. Study also gives some ideas of how reasoning could be written on paper sheets, how forming hypothesis with origami lets different lines of mathematical reasoning emerge.

Keywords: Mathematical reasoning; Mathematics teaching with origami; Concept learning; Modes of representation; Transformational geometry.

Extended Summary

Purpose

This study used origami as a thought provoker. Mathematical thinking may be defined as guessing, induction, deduction, descriptives, giving examples, pictorial and picture less reasoning, interrelations between concepts, and similar complex processes (Alkan and Bukova-Güzel 2005, Kahramaner and Kahramaner, 2002; Schoenfeld, 1992, Wares, 2016, Yıldırım, 2015) via concepts, pictures, and structures are also important.

An origami lucky star is folded like a knot from a rectangular paper strip. By the aid of the concepts like pentagon, perpendicular triangle, isosceles trapezoid and sinus, one can see how the perpendicular triangle in the left side happens to be in the right side of the pentagon and how they happened to be equal. It asks for transformational geometry knowledge and in depth mathematical thinking.

Method

Case study is the method. Preschool elementary mathematics teachers were subjects. Problem for them is finding a pentagon from folding a rectangular strip like a knot. Problem for researcher is with such an origami piece, how different mathematical thinking lines occur. Concept knowledge and representational choices are analyzed according to mathematical thinking and origamics. Origamics is a new way of doing origami with mathematics. Each step is thought in terms of mathematical principles and interrelated mathematical concepts.

After a two weeks course on origami and modular origami, subjects were given the question of "why a regular pentagon happens when a rectangular strip has been knotted". Most of the web sites on this topic include the pictures of the problem including making of the origami lucky star. But none of the pages were on the mathematics of it. This ensured validity. For the reliability of the study, the answer pages preservice teachers given were analyzed for exactness. None of the answer pages were exactly the same.

Data was analyzed on the frequency of concept use and representational choices. Also, their mathematical thinking ways were listed. Frequency of concepts used first, second, third and last choices. Then representational choices were listed for verbal, visual and kinesthetic. Each answer sheet was separated on what kind of representational choice or choices were used.

Results

Ideal answer was written by only a portion of the students. Some chose guessing and measuring by a ruler and some answer sheets may be thought of as the answer of a mathematician. The most frequent used concepts were "side" (12 subjects) and "pentagon" (4 subjects). "Side" may be chosen due to its neutrality. "Pentagon" on the other hand was given in the question. Some subjects used less number of concepts; some used more due to confidence. Writing mathematics is harder than talking or just answering a problem and asks for full justified sentences. Also, consciousness about control and cognitive processes goes in hand with concept use in mathematics (Schoenfeld, 1992). The isosceles trapezoid (key concept) used by 8/18 and used rarely but it is the trapezoid inside the pentagon. Concept of "sinus" was used by 6/18 as the "sinus 72" inside the perpendicular triangle. It is close to half but still only 6 preservice teachers reached to the last phase of the solution.

2 out of 18 chose verbal representation solely. 5 subjects used three types of representations at the same time. 11 subjects used verbal and visual at the same time similar to the early research on representations and learning styles. Subjects used measuring, assumptions, reasoning, benefiting from the open figure, visualization, characteristics of a five pointed star and origamics. Interesting thing is they were not allowed to measure from the beginning but still some of them used it. However, they all did use different steps of thought and measure at different times. Guessing was used in conjunction.

When the answers of preservice teachers were analyzed, interacting with diagram (1, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.) and starting from the diagram (2, 2, 4, 6) were noted. There were also nonfigurative (7, 9) and the one with diagram at last. 5th preservice teacher was identified as the best answer and used diagrams interactively and developed his/her sense of reasoning and gave more details. This subject reached isosceles trapezoids from triangles, other trapezoids from rotational symmetry, and to side of the pentagon from sin 72 and all these. From the “side” concept to the “angle” concept, thinking was noted inside the diagram originated answers (only 11 and 18 were out of these). Diagram based thinking was noted with from pentagon to the triangle. Still it may be attached to the use of pentagon in the question. Side is on the other hand an intersection concept for pentagon, triangle, trapezoid and it is safe to use.

Data gathering examples were identified in the answers of 2, 3, 7, 8, 9, ve 14. subjects. They answered the question by measuring and looking the results when different strip width was used. 3., 8. and 17. preservice teachers used hypothesis. Only 3/18 used this. Even the 5th subject did not use a hypothesis.

Thinking steps were identified. Here, how thinking occurs with diagrams and what kind of concepts are at their emphasis were decided. 5th subject’s answer was an example one. He/she identified the isosceles trapezoid and realized that it was not a piece of hexagon (different angles). By rotational symmetry, trapezoids and equal triangles from the sides of his/her answer were unique. Rotational symmetry is a new topic in the curriculum; hence the preservice teachers were not ready for it. 4, 16 and 17.answers were with insufficient mathematical thinking, only 15. answer was with a faulty mathematical thinking sequence. Problem was the isosceles trapezoid inside the hexagon is not same with the trapezoid inside a regular pentagon due to angles. In the insufficient answers, either the mathematical thinking was half way gone or was not clarified.

Discussion and Conclusion

This study identified mathematical thinking via origami problem. Time and stress may close the thinking ways. This is even in conjunction with the cognitive load theory of Steller. However, they still showed some sort of mathematical thinking lines of reasoning as conjecturing, hypothesizing, guessing, verbal, visual and kinesthetic modes of reasoning. Each person should be treated unique from the point of the mathematical thinking. Reasoning with concepts varied regarding the concepts and lines of mathematical thinking. Diversity may explain use of case study as the study method. Subjects may get help from other sources so the problem should always be out of internet or not easy to find kind. While taking answers, open ended questioning may be a problem, hence next time a structured interview could be helpful. Use of a material as easy as origami may be a challenging was of provoking mathematical thinking but still students showed interesting lines of mathematical thinking so far.

Giriş

Origami Japonya'da doğup gelişmiş; ama etkisi bütün dünya coğrafyasına yayılmış bir kâğıt katlama ve el becerisi olarak tanımlanabilir. Son yıllarda origaminin matematik öğrenme ile ilgisi incelenmeye başlanmış ve "origamics" diye isimlendirilen bir alan ortaya çıkmıştır. Origamics, matematiksel kavram bağıntılarının origami yoluyla irdelenmesi olarak tanımlandırılmıştır (Haga, Fonacier ve Isoda, 2008). Basit olarak nitelendirilen origami sanatı yardımı ile matematiğin değişik bir bakış açısını ele almaktadır (Sunay, 2008). Bir kâğıt parçasından çıkan üç boyutlu cisimler ve şekiller insanın matematiksel düşünce ufkunu genişletir (Akauyure, Asiedu-Addo ve Alebna, 2016; Sunay, 2008; Wares, 2016). İşin aslı sadece materyal kullanımının bile matematiksel düşünmeye olumlu etki yaptığı araştırmalarla sabittir (Kılıç, Tunç-Pekkan ve Karatoprak, 2013). Çünkü öğrenci somut işlemlerden soyuta geçişi daha kolay yapabilmektedir.

Origaminin matematik eğitiminde hem matematik başarısını arttırmada hem de matematiksel düşüncenin gelişimindeki yeri yeni araştırmalar ile de sağlamlaştırılmıştır (Akauyuure, Asiedu-Addo ve Alebna, 2016; Arıcı ve Aslan-Tutak, 2013; Arslan, 2012; Arslan, Işıksal-Bostan ve Şahin, 2013; Çakmak, 2009; Çakmak, Işıksal ve Koç, 2013; Çeziktürk, 2004; Dündar-Koylahisar, 2012; Erktin, Özkan ve Balcı, 2003; Polat, 2013; Tuğrul ve Kavici; 2003; Wares, 2016;). Yalnız matematik kavramlarının detaylı olarak origami yoluyla nasıl öğretildiği veya vurgulandığı üzerine araştırmalar yok denecek kadar azdır. Alanyazında yapılan araştırmalar origami yoluyla özellikle cebirsel denklemlerin, açıların, alanların, aritmetiğin, doğru kavramının, denkliğin, oranların, kesirlerin, grafiğin, eşitsizliklerin, parametrik düşünmenin, çok yüzlülerin, Pisagor teoreminin, uzamsal görselleştirmenin, dönüşümlerin ve simetrinin ilerletilen beceriler kapsamına girebileceğini içermektedir. Hatta bazı kaynaklarda matematiksel düşünme süreçleri olarak da görülen VanHiele geometrik düşünce süreçlerinde 0-2 arası düzeylere ulaşmada faydalı olacağı vurgulanmaktadır (Akayuure, Asiedu-Addo ve Alebna, 2016). Aynı araştırmacılar, dersin origami yoluyla anlatılmasının öğrencilerin kendi şekillerini oluşturmasına, kendi çıkarımlarına ulaşmasına izin verdiğini belirtmektedirler. Uzayı tanımak için ve uzayla ilgili yeteneklerin gelişimi (çizim yapma, modelleme, yapı düzenleme gibi) için geometrik düşüncelerden yardım almak esastır (Altun, 1999).

MEB (2013) ilköğretim 5-8 müfredatında matematiksel düşünmeyi matematik öğrenme için gerek koşullardan birisi olarak listelemiştir:

"*Diğer yandan matematiği öğrenmek; temel kavram ve becerilerin kazanılmasının yanı sıra matematikle ilgili düşünmeyi, problem çözme stratejilerini kavramayı ve matematiğin gerçek yaşamda önemli bir araç olduğunu fark etmeyi de içerir*."

Matematik eğitiminin temel amaçları arasında da:

"*3. Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilecektir.*

4. Matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminoloji ve dili doğru kullanabilecektir.

7. Kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade edebilecektir." bildirgeleri yer alır.

Matematiksel düşünme nedir ve neden önemlidir diye soran Stacey (2006) okullaşmanın asıl amacının bu olduğunu, matematik öğrenmenin bir yolu olduğunu, matematik öğretmek için bir araç olduğunu ve matematik okur-yazarlığının gelişmesinde faydalı olacağını belirtir. Matematiksel düşünceyi sadece dört başlıkta inceler: özelleme (örnekleri inceleme), genelleme (örüntü arama), çıkarımlarda bulunma (ilişkileri tahmin etme) ve ikna etme (bir şeyin neden doğru olduğunu sistematik olarak açıklama) (Stacey, 2006).

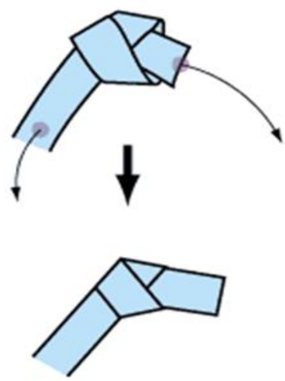
Örnek olarak da Fermat'ın son teoremini 1994 yılında çözen Andrew Wiles'ın kendi kaleminden matematiksel düşünceyi özetler. İçi karanlık odalarla dolu bir köşkte karanlık bir odada geçirilen 6 ay sonunda belki o odadan aydınlığa çıkarken diğer karanlık odalar durmaktadır ve keşfedilmeyi beklemektedir. Matematikçinin matematiksel düşünme süreci bu tanımdan da anlaşılacağı üzere oldukça uzun bir süreçtir. Ama sınıfta problem çözerek, matematik araştırmaları yürüterek, modellemeler yaparak, fikirler arası bağlantılar kurarak bu entellektüel gezintiye veya matematik keşfi ruhuna yaklaşmak mümkün olabilir (Stacey, 2006).

Matematiksel düşünme (MD); tahmin edebilme, tümevarım, tümden gelim, betimleme, genelleme, örnekleme, biçimsel ve biçimsel olmayan usa vurma, doğrulama, kavramlar arası geçiş, irdeleme, algılama, veri derleme, grafik, şekil, örüntüler yoluyla yaklaşım ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşimi olarak düşünülmektedir (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005; Ersoy ve Güner, 2014; Schoenfeld, 1992; Yıldırım, 2015). Bir açıdan da problemleri anlamak, soyut düşünme, sayısal düşünme, argüman değerlendirme, matematiksel modelleme, kesinlik arama, düzen aramak, tekrarlanan ve tutarsızlığa düşmeyen akıl yürütme, hipotez oluşturma, hipotezi test etme de matematiksel düşünce araçlarından kabul edilmektedir (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005; Kahramaner ve Kahramaner, 2002; Wares, 2016). Matematiksel düşünmenin oluşumunda bir ürüne ulaşma çabası olduğu yadsınmamalıdır. Kimi insan, grafikler ve şekiller yardımı ile kimisi ise yapı ve yapıyı oluşturan içerik ve bağıntıları analiz ederek matematiksel düşünceyi aşmaktadır (Schoenfeld, 1992; Yıldırım, 2015). Bireysel matematiksel düşünmenin gelişmesi için öğretmenlerin rolü önemsenmelidir ki bunun için araştırmada öğretmen adaylarının matematiksel düşüncesi ile ilgilenilmiştir. Stacey öğrencilerde matematik düşünmeyi oluşturmanın en önemli fazının önce öğretmenin matematiksel düşünmesi olduğunu vurgular (2006). Tataroğlu-Taşdan, Çelik ve Erduran (2013) matematiksel düşünmenin gelişimi için; buluş yoluyla öğretimin, keşfederek öğrenmenin, ön bilgilerle ve günlük hayatla ilişki kurulmasının, problem çözmenin, beyin fırtınasının, farklı çözümlere özendirmenin, eleştirel düşünmenin, proje ve performans ödevlerinin, işbirlikli kadar bireysel öğrenmenin, bilim adamının yaşadığı süreci deneyimliyor olmanın, soru-cevap yönteminin ve yapılandırmacı yaklaşımın faydalı yöntemler olduğunu savunurlar. Matematiksel düşünceyi statik değil dinamik bir süreç olarak görmenin öneminden bahsederler (Henningten ve

Stein, 1997; Tataroğlu-Taşdan, Çelik ve Erduran, 2013). Bu bağlamda matematik araçlarını sistematik olarak örüntüleri araştırmak için kullanmak, problemleri tanımlamak, irdeleme süreçlerini tutarlı hâle getirmek, matematiksel düzeni algılamak, olaylara matematiksel bakış açısını çözmek gibi süreçler matematiksel düşünmenin çerçevesini çizer (Henningsen ve Stein, 1997). Süreçlerde hatalar olabilir, meselâ; asıl altta verilmeye çalışılan anlamı anlamak yerine mekanik akıl yürütmede tıkanılabilir. Veya sistematik açılım amaçlandığı kadar sistematik olmayabilir. En önemlisi aktivitenin vizyonunda matematiksel odak noktası kaçırılabilir. Çoğunlukla matematiğin en eleştirilen kısmı ezberlenmesi gereken formüllerdir, algoritmalardır, süreçlerdir. Oysa hepsinde üstte bahsedilen dinamik süreçler hâlen vardır ve örneklerle bunlar çoğaltılabilir. Burada asıl iş öğretmene düşmektedir. Zaman problemine gelince, bu problem olmaktan çıkarılıp anlamanın bütün ve eksiksiz olduğu ve doğru düşünme adımlarının gösterildiği çıkarımları netleştirmek amaç olmalıdır. Bazen soru veya görev öğrenci için uygun olmayabilir. Veya ayrılan zaman yeterli gelmeyebilir. Görevin asıl düşündürtecek noktalarının önceden çıkarılması da söz konusu olabilir. Bütün bu problemlerle savaş öğretmenin olmalıdır, öğrencinin değil. Ya süreç düşünülmesinde anlam önemsizleşirse, o zaman öğretmen tekrar anlam kazandırmanın yollarını düşünmelidir (Henningstein ve Stein, 1997). Fraivillig, Murphy ve Fuson'un (1999) yaptığı araştırmalar, öğretmenlerin çoğunlukla matematiksel düşünceyi desteklediğini; ama ortaya çıkarma ve genişletme konusunda eksik kaldıklarını göstermektedir.

Matematiksel düşüncenin oldukça büyük bir kavram olduğu bir gerçektir. O zaman farklı boyutlarının ortaya çıkabilmesi için durum değerlendirmesi nitelikli araştırmaların sayısının artmasına ihtiyaç vardır. Bu şekilde belirli konu başlıkları altında matematiksel düşüncenin özellikleri incelenebilir ve detaya inilebilir. Ersoy ve Güner (2014) matematiksel düşünmeyi ölçen bir ölçek geliştirmişlerdir. Bu ölçeği uyguladıklarında doğru stratejinin bazen yanlış çözüme ulaştırabildiği gibi enteresan bir nokta fark etmişlerdir. Uyguladıkları deneklerde MD orta düzeyde çıkmıştır. Origami ile matematiksel düşünme internette daha çok yönergeler ile bulunduğundan bu alanda düşünmeyi geliştirme yolu açıktır. Hem alt hem de üst sınıflar için bir düşünme aracı şeklini almaktadır.

Duval (1999), anlamsal gösterimlere dikkati çeker. Ve bunların düşünmenin içsel süreci olduğunu vurgular. Özellikle aynı gösterim modları arası geçiş olan "süreçlendirme" ve farklı gösterim çeşitleri arasındaki "dönüştürmeye" vurgu yapar. Ona göre matematiksel düşünme bu süreçler arası bir etkileşimdir. Bazen bir gösterim şekli diğerlerine göre daha çok tercih edilebilir. Bazen de bir gösterim şekli daha kolay anlaşılabilir olabilir. Ama gene de en azından bir–iki gösterim şekli bir arada cereyan etmelidir. Bu MD için gerek koşuldur. Ama Duval'e göre çoğu öğretmen, matematikçi ve hatta psikologlar süreçlendirme ve dönüştürme süreçleriyle ilgilenmezler. Öğrenciler çoğu zaman dönüştürmenin yönü değiştiğinde fark etmeyebilirler. Aslında bu da matematiğin öğrenilmediğine delâlettir. Aynı şekilde tümevarım ve tümden gelimin bağlantısı öğrencilere verilmelidir (Duval, 1999). Kendisi aynı zamanda figürsel yeniden düzenlenmeye dikkat çeker. Meselâ bizim araştırma konusu olan problemimizde ikizkenar yamuk ile içindeki üçgenlere dikkat çekmek anlamayı kolaylaştırabilir.



Şekil 1. Kağıt şeritten beşgen yıldız katlama.

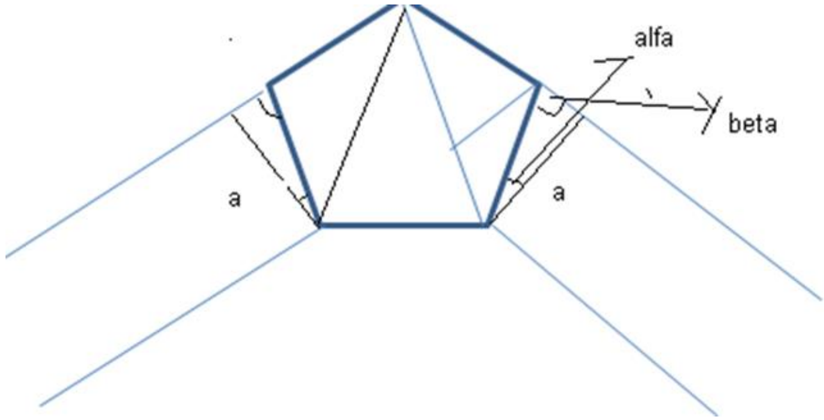
Japonların iyi bilinen şans yıldızı origamisinde bir şerit kâğıt alınır ve düğüm atılmaya çalışılır (Şekil 1). Katlamada diğer uç yavaş yavaş çekilirse elde edilen düğüm katlamasından düzgün beşgen çıkar. Bu beşgenin bir kenarı (x) ile şeridin kalınlığı (a) arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı bulunur.

$$x=(a/\text{Cos } 18°)=(a/\text{Sin } 72°)$$

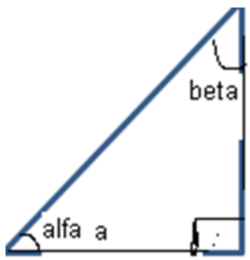
Japonlar bu bulunan şekildeki şeridi iç içe geçirmelerle devam ederler ve işin ucunda "luckystar" da adı verilen şans yıldızı origamisi ortaya çıkar. Bu origami ilköğretim öğrencileri için yaptıkları süslemelerde en çok kullandıkları süsleme şeklidir. Kâğıda düğüm atıldığında düzgün beşgen çıktığını görmek büyük insanlar için de aynı oranda şaşkınlık aracı olmaktadır. Bu da merak uyandırma ve proje çalışması olarak bütün sınıf düzeylerinde kullanılabileceğini gösterir. Devlin (2012), Dirichlet'in fonksiyon konusundaki argümanına dikkat çeker. Bir fonksiyon bir çeşit objeleri alıp yeni objeleri onlardan üreten herhangi bir kuraldır, der ve fonksiyon kelimesinin anlamını genişletir. Burada origami bir fonksiyon gibi düşünülebilir.

Çalışma sorusu olarak kâğıt şeritle beşgen katlamadaki geometrik bağıntılar sorulmuştur. Araştırma problemi olarak ise böylesi bir origami aracıyla matematiksel düşüncenin aldığı farklı yollar irdelenmiştir. Matematiksel düşüncenin kavram bilgisi ve gösterim yolu çeşitliliği ile bağlantısı incelenmiştir. Şekil 1'de de görüldüğü gibi şerit kalınlığı işlem boyunca sabit olup "a" olarak alınabilmektedir. Solda oluşan dik üçgen ile sağdaki dik üçgen benzer ötesi eştirler (Şekil 2). Bu da şu şekilde kanıtlanabilmektedir:

Dik üçgende alfanın karşısındaki dik kenar; şeridin kalınlığı "a" hipotenüs (beşgenin kenarı) ise "$a/\sin \alpha$" şeklinde bulunabilir (Şekil 3). Fakat hipotenüs aslında beşgen olarak görülen şeklin bir kenarıdır. İçeride oluşan paralelkenarın aynı zamanda eşkenar dörtgen olduğu kâğıt şeridin iki yan kenarının birbirine paralel oluşu, düğümdeki iç içe geçmelerdeki kâğıdın yönü yüzünden anlaşılabilir. Dörtkenarı da "$(a/\sin \alpha)$" şeklindedir. Eşkenar dörtgene aşağıdaki üçgen birleştiğinde ikizkenar yamuk oluşur. Dönüşüm geometrisindeki dönme simetrisi şeridin aldığı yoldaki 3 ikizkenar yamuğu belirler. Kâğıt sağ taraftan çıkarken solda düğüme girişteki işlemin tersi meydana gelir. Soldaki yamuk şeridin dönüp tekrar girmesiyle sağdaki yamukla örtüşmüştür. O zaman diğer kenarların da "$(a/\sin \alpha)$" oldukları görülür ki bu da beşgenin ancak düzgün beşgen olması hâlinde mümkündür (Şekil 2).



Şekil 2. Katlamadan sonraki görünüm.



Şekil 3. Oluşan eş üçgenlerin formu.

Yöntem

Araştırmada durum değerlendirmesi bağlamında içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Durum değerlendirmesi belli bir olay, durum, grup hakkında bir sorunun derinlemesine incelenmesidir. Bunun için uygun istatistiklerle de desteklenebilir. Bu hâliyle nitel bir çalışma sayılabilir çünkü veri sayısı on sekizle sınırlıdır. Araştırmanın problemi olarak ise aday öğretmenlerin bu problemi çözmede kullandıkları matematiksel düşünce yollarının birbirinden ne derece farklı olduğu araştırılmıştır. Bu hem örneklemin sayıca azlığından (18) hem de detaya yeterince indirilebilecek analiz özgürlüğü sağlaması açısından düşünülmüştür. Araştırmanın diğer problemleri olarak aday öğretmenlerin kullandığı gösterim şekillerinin problemin çözüm açıklamalarında ne kadar etkili olduğu ve kavram bilgisinin açıklamalarına nasıl yansıdığı araştırılmıştır.

Çalışma Grubu

Çalışma bir devlet üniversitesinin ilköğretim aday öğretmenlerinin seçmeli derslerinden “Matematik” ve “Sanat” dersi bağlamında yapılmıştır. Evren olarak durum değerlendirmelerinin genelleştirme konusundaki zayıflığı da hesaba katılarak aynı üniversitesinin ilköğretim aday öğretmenleri düşünülebilir. Örneklemin seçiminde gönüllülük esastır ve bütün düşündüklerini yazmaları istenmiştir. Çalışma için haftalık olan 3 saatten 1 ders günü origamiye ve 1 ders günü ise modüler origamiye ayrılmıştır.

Veri Toplama Araçları

Dönem içinde bu iki saat origami dersinden sonra verilen ödevi 1 hafta süre ile kendi başlarına, doğal çalışma ortamlarında ve attıkları her adımı yazarak (matematiksel olarak sebep ve sonuç ilişkisi ile) çözmeleri beklenmiştir. İlgilenen öğrenciler bu ödevin cevabını 1 hafta içinde getirmişlerdir. Eldeki veriler ve Pisagor teoremi, benzer üçgenler, dik üçgenlerin Öklid bağıntıları, trigonometri bilgilerini, beşgenin köşegen özellikleri, beşgen içindeki ikizkenar yamuklar ve kâğıdın kat izlerinden yararlanarak beşgenin bir kenarını ve mümkünse neden düzgün beşgen olduğunu matematiksel akıl yürütme ile çıkarmaları beklenmiştir.

Verilerin Analizi

Ödevin internette “luckystar-Şans yıldızı origamisi” bulunmakla birlikte bir cevabı yoktur, bu da orijinalliği ve geçerliliği sağlamıştır. Güvenirlilik için bu 18 kâğıt tamamen veya büyük oranda benzer olmamaları için incelenmiştir. 18 öğrencinin kâğıdı ortak ve farklı matematiksel düşünce irdelemelerine göre de incelenmiştir. Temalar çıkarılmıştır. Kavram kullanma sıklıkları, kullandıkları sunum yolları ve matematiksel düşünce adımları açısından analiz edilmişlerdir. Numaralandırılırken ödevi verme tarihlerine göre sıralanmışlardır. Bu analiz yöntemlerine karar verilirken MEB’in 2013 müfredatında belirttiği, kavramsal öğrenme, matematiksel düşünme, bunu yazıyla ifade etme ve temsil çeşitleri noktalarına dikkat edilmiştir.

Bulgular

Araştırma sonucunda gerekli akıl yürütmeyi seçen öğrencilerin az olması dikkat çekicidir. Genelde tahmin veya cetvelle ölçme yolları tercih edilse de akıl yürütenlerin ulaştığı noktalar bir matematikçinin düşünme yolları gibi varsayılabilir. Bu araştırmanın verileri matematiksel akıl yürütmenin bilişsel adımları olarak da incelenebilir.

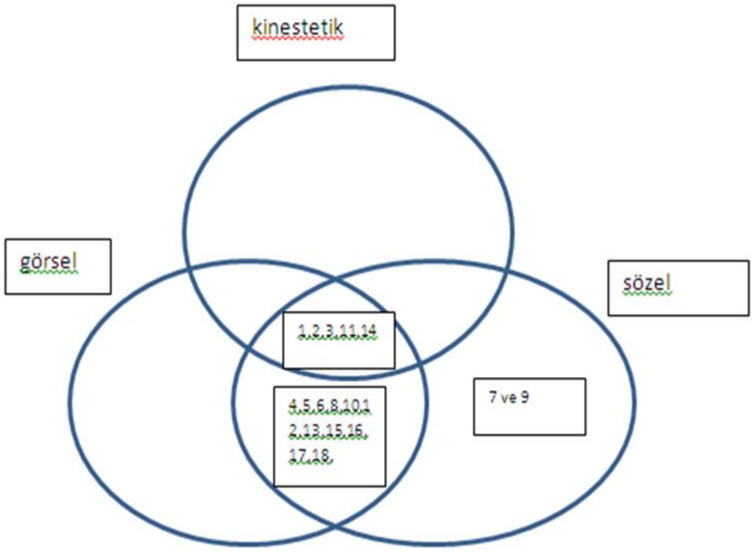
Tablo 1. Kavramların Öğretmen Adayları Tarafından Kullanılma Sıklıkları

1.sıklıkla kullanılan terim	2.sıklıkla kullanılan terim	3.sıklıkla kullanılan terim	4.sıklıkla kullanılan terim
Kenar (4)	Yamuk (3)	Beşgen, köşegen (2)	Esbesgen, esyamuk (1)
Beşgen (7)	Genişlik, kenar, açı (6)	Uzunluk (3)	Üçgen (1)
Beşgen (4)	Sin (3)	Açı, cm (2)	Üçgen, kalınlık (1)
Kenar, beşgen (6)	X (3)	Yamuk, eşkenar (2)	İkizkenar yamuk, uzunluk, en, hipotenüs (1)
Kenar (11)	Düzgün beşgen (3)	Yamuk, ikizkenar yamuk, eş uzunluk (2)	Uzunluk, en, bağıntı, sin (1)
Uzunluk, düzgün beşgen, en, a (2)	Eş, ikizkenar üçgen, beşgen, hipotenüs, uzunluk (1)		
Kenar (4)	Düzgün beşgen, ikizkenar yamuk (3)	Genişlik, beşgen(2)	Dikdörtgen, uzunluk (1)
Beşgen (6)	Genişlik, kenar, uzunluk (3)	Kalınlık, dikdörtgen, eşyamuk (2)	Düzgün beşgen, genişlik, bağıntı, yamuk, taban, yankenar, ikizkenar (1)
İkizkenar yamuk (10)	Kenar (9)	Beşgen, cm (4)	Sabit (3), uzunluk, taban, genişlik, açı, düzgün beşgen (2), çokgen, tan (1)
Kenar (10)	Eşit (5)	Düzgün beşgen, beşgen (3)	Yamuk, açı, benzerlik, en (2) a, uzunluk, üçgen, yankenar, bağıntı, sin (1)
Düzgün beşgen, kenar (3)	Yamuk, en (2)	Dik, açı, beşgen, sin (1)	
Kenar (12)	Eşit (7)	Beşgen (6)	En (4), üçgen ve düzgün beşgen (3), yamuk, dik açı, bağıntı, sin (2), dikdörtgen, uzunluk, benzerlik, hipotenüs, ikizkenar yamuk, içaçı (1)
Kenar (6)	Beşgen (4)	a (3)	Uzunluk, eşkenar beşgen (2), ikizkenar yamuk, yamuk, eşit, en, hipotenüs (1)
Kenar, uzunluk (3)	Eşit (3)	Düzgün beşgen, açı (2)	Üçgen, cm, kalınlık (1)
Altıgen, kenar, eşkenar, açı (3)	Beşgen, uzun, derece, Eşit (2)	Taban, sabit, paralel, kısa, doğrusal, eş (1)	

Kenar (3)	Nokta (2)	Beşgen (1)	
Kenar (5)	Beşgen (4)	Eşkenar beşgen, yamuk (3)	En, uzunluk (2), Pisagor teoremi, ikizkenar yamuk, eşit (1)
Eşkenar beşgen, yamuk (3)	İkizkenar yamuk, kenar, eşit (1)		

Tablo 1'de aday öğretmenlerin cevaplarındaki kavramların kullanılma sıklıkları her bir aday öğretmen için satır satır incelenmiştir. Tabloya bakıldığında, en sık kullanılan kavramlar *kenar* (12 aday öğretmen tarafından) ve *beşgen* (4 aday öğretmen tarafından) olmuştur. Bunlardan kenar kavramının sadece matematiksel bağlamda kullanıldığı sayıldığına göre ve beşgenle üçgenin de yamuğun da kenarları olacağı için bu kavramı tarafsız bir kavram olarak algılanabilir. Beşgen kavramının sıklığı da soruyla direk alakasına bağlanabilir. Cevaplarını yazarken sadece 3 kavram kullanan da olmuştur, 19 kavram kullanan da görülmüştür. Bu ise aday öğretmenlerin kendilerinin kavram bilgisinin yetersizliğine ve fazlalığına bağlanmaktan öte matematik yazmadaki öz yetersizlik inançlarına bağlanabilir (Özgen ve Bindak, 2011). Schoenfeld (1992) matematiksel kavramlar ile bu kavramları kullanarak problem çözmenin dinamik bir etkileşim gösterdiğini belirtmiştir. Schoenfeld'e göre (1992) kontrol süreçleri ve bilişsel süreçler hakkındaki farkındalık matematiksel kavramların anlaşılmasının eşgüdümsel gelişimiyle birlikte görülmektedir. Burada kontrol süreci olarak sıklıkla şekillerle etkileşim kullanılmıştır.

Anahtar kavram "ikizkenar yamuk" toplamda 8/18 kişi tarafından kullanılmıştır ama kullanım sıklığı epey azdır. İkizkenar yamuk, beşgenin içindeki yamuktur. Onun fark edilmesi ve dönme simetrisi ile birlikte düzgün beşgen ortaya çıkar. Sinüs kavramı dik üçgendeki 72 derecenin sinüsü olarak ve 18 kişi içinde 6 kişi tarafından kullanılmıştır. Üçte bire yakın olması dikkate değerdir fakat yine de çözümün son merhalesine sadece 6 aday öğretmen yaklaşmıştır.



Şekil 4. Aday öğretmenlerin cevap verirken kullandıkları gösterim yolu seçimler.

Görüldüğü gibi 18 öğrencinin sadece 2 tanesi sadece 1 çeşit gösterim (sunum) yolu tercih ederken ki bu da sözel olmuştur, 5 öğrenci üç sunum yolunu (görsel, sözel ve kinestetik) bir arada kullanmıştır (1, 2, 3, 11, 14). Üç gösterim yolunun bir arada kullanılması çok yönlü düşünceye örnektir ve matematiksel düşünmenin de desteklenmesine olanak sağlamaktadır. 11 öğrenci ise görsel ve sözel cevabı birlikte vermeyi tercih etmiştir. Literatürdeki benzer araştırmalarda görüldüğü üzere en çok görülen gösterim yolu seçimleri görsel ve sözel birlikte sunum çeşitleridir. Schoenfeld'in (1992) bilgi gösterim yollarının temel bilgi, problem çözme stratejisi, kaynakların etkin kullanımı için ve matematiksel bir perspektife sâhip olmak için faydalı olacağını belirtmesini hatırlayalım.

Schoenfeld (1992) matematik öğrencisi ve matematikçi arasındaki matematiksel düşünce farklılığını matematiksel düşüncenin içerisinde harcadıkları süreç zaman farklılıkları ile belirlemiştir. Matematik öğrencisi okuma ve açıklamaya çok zaman harcarken, matematikçi analiz, açıklama, plân, uygulama ve doğrulamaya eş zamanlar harcar. Bizim matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünce süreç analizi bu çerçevede incelenmelidir ve bu da bazı öğretmen adaylarının matematik öğrencisine bazılarının ise matematikçi gibi matematik düşünmeye yakınlıklarıyla açıklanabilir.

Tablo 2. Aday Öğretmenlerin Kullandıkları Düşünce Adımları

Aday Öğr.	**Matematiksel düşünce adımları**
1	Şekil-2 beşgen-şekil-dört yamuk-şekil-altıgen
2	Şekil-kâğıt katlama-ölçümlerle veri toplama-kenar-eşkenar-beşgen
3	Şekil-ölçme-açı aynı kalır ama kenar kalınlığı arttıkça düzgün beşgenin kenarı büyür
4	Şekil-üçgen-ikizkenar yamuk-üçgenin hipotenüsü-(ortada kalmış)
5	**Şekil-yamuklar-şekil-üçgenler-şekil-ikizkenar yamuklar-şekil-üst üste yamuklar-şekil-dönme simetrisi- şekil-üçgen-sin 72-şekil-beşgen kenarı (örnek cevap)**
6	Şekil-ikizkenar yamuk-dik üçgen-hipotenüs-üçgenin kenarı
7	Farklı şeritler ile veri toplama-ikizkenar yamuklar-ortak kenar
8	Veri toplama-şeridin kalınlığı ile yamuk kenar-eş yamuklar
9	İkizkenar yamukların eş kenarları ve kâğıt katlandığında oluşan yamuğun eşkenarları-veri toplama (ölçülerle)-72 derecelik sapmayı fark etme-4 tane ikizkenar yamuk
10	Şekil-kat izlerinden ikizkenar yamuk-şekil-dikdörtgen- şekil-katlama ile 108 derece
11	Şekil-kat izleri-yamuk-şekil-dik üçgen(yamuk içi)-şekil- katlama ile oluşan yamuk-şekil-dik üçgen
12	Şekil-şekil-kat izlerinden 3 eşkenar yamuk- şekil- dik üçgen-şekil-eşkenar katlama ile eşkenar-72 derece
13	Şekil-eşkenar beşgen-şekil-ikizkenar yamuklar ile beşgen ortak kenarlar-şekil-büyüklüğe karar verme
14	Şekil-iki örnek deneme-şekil-ölçüp oranının sin 72 derece olduğunu görme- şekil-açının aynı kaldığını gösterme
15	Şekil-çıkan ikizkenar yamuk ile düzgün altıgenin yarısı- şekil-açılar karışmış (hatalı düşünme)
16	Şekil-beşgenin nasıl olduğunu anlama çalışma-şekil-kenar uzunluklarına girmeme (eksik düşünme)
17	Şekil-3 ikizkenaryamuk- şekil- dik üçgenden beşgenin bir kenarı şeridin kalınlığından büyük deyip bırakma (eksik düşünme)
18	İkizkenar yamuk-şekil-kenarlar eşit-şekil-yamukların üstüste gelmesinden eşkenar beşgen

Aday öğretmenlerin yanıtlarına bakıldığında aslen ölçme, kabul etme, sebep sonuç ilişkisi, şeridin açık görünümünden yararlanma, görsellikten ve beş köşeli yıldızın özelliklerinden yararlanma, kenar köşe bağlantılarından yararlanma ve origamics gibi matematiksel düşünce yolları kullandıklarını görmekteyiz. İlginç olan ölçmeyi (baştan öyle yapmamaları söylendiği halde) farklı noktalarda işe sokmaları, görsellikten farklı noktalarda yararlanmaları ve farklı sebep sonuç ilişkileri kullanmaları olmuştur. Tahmin, ölçme ile bağlantılı kullanılmış ve ölçmeyi desteklemesi sağlanmıştır.

Aday öğretmenlerin cevapları daha farklı bir şekilde analiz edildiğinde, şekille etkileşimli (1, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. Aday öğretmenler), ve şekil kaynaklı (2, 3, 4, 6) matematiksel düşünce ürünleri kadar şekilsiz (7, 9) ve en son şeklin düşünüldüğü (8) ürünler de gözlemlenmiştir. Şekil kaynaklı düşünen aday öğretmenlerin görsel olmaları beklenen bir gerçektir. Fakat ilginç olanı onlardan sadece ikisinin (2 ve 3. aday öğretmenler) aynı zamanda sözel ve görsel kadar kinestetik gösterim biçimini de seçmiş olmalarıdır. Bu adaylar farklı kalınlıklardaki şeritleri katlayarak sonuca varmaya çalışmışlardır. Bu da bu iki aday öğretmenin çoklu gösterim şeklini seçtiğini ve şekle bakarak başlamalarına rağmen hem kâğıt katlayarak örnekler yardımı ile hem de sözel olarak sebep sonuç ilişkileriyle sonuca ulaştıklarını göstermektedir. 2 ve 3. aday öğretmenlerin ikisinin de beşgeni en çok ve üçgeni en az kavram sıklığıyla kullandıklarını görebiliriz. İkisi de veri toplama ve hipotez merhalelerine gelmiş olsalar da kilit kavram olan ikizkenar yamuktan hiç bahsetmediklerini görmekteyiz. Bu da üç gösterim şeklini yeterince kullanamadıklarını veya düşündüklerini yeterince detaylı anlatamadıklarını göstermektedir.

5. aday öğretmen (örnek açıklama kabul edilirken), her adımda şekle dayanarak karar vermiştir; ama şekilde sürekli kendini geliştirmiştir ve daha çok detaya inmiştir. Bu aday öğretmen, şekille etkileşimli olarak matematiksel düşüncesini açıklamıştır. Bu şekilde üçgenlerden ikizkenar yamuklara, dönme simetrisinden diğer yamuklara, sin 72 ve beşgen kenarına çıkarımlarıyla ulaşmıştır. Şekille matematiksel düşünme bazı görülmeyen bağıntıları da verdiğinden işleri kolaylaştırmakta ve sonuca daha kolay erişilmektedir. Fakat bu aday sadece iki gösterim şeklinden (görsel ve sözel) yararlanmıştır. Bu sonuç da biliş yüklenmesinin gerçekleşmemesi ile açıklanabilir. Sadece görsel aday öğretmenlerin şekil kullananlar olduğu aşikârdır. Şekille etkileşimli düşünce adımları kullananlar ile şekil kaynaklı düşünce adımları kullananlar

arasındaki fark çoğunlukla (11 ve 18. aday öğretmenler hâriç) kenar kavramından açı kavramına gidenlerin ikinci gruptakiler olmasıdır. Birinci gruptakiler ise beşgenden üçgen kavramına geçiş yapmışlardır. Gene bu, soruda beşgen kavramının kullanılmasına bağlanabilir. Kenar ise beşgen, üçgen, yamuk için kesişim kavramıdır ve güvenli olanın bu kavramın kullanılması olarak görüldüğü düşünülebilir.

Veri toplama örnekleri 2, 3, 7, 8, 9, ve 14. aday öğretmenlerin cevaplarında görülmüştür. Bu aday öğretmenler genelde ölçüm yaparak ve farklı şerit uzunluklarına göre sonucun nasıl değiştiğine bakarak karar vermiştir. 3. 8. ve 17. aday öğretmenlerde hipoteze başvurulduğu belirlenmiştir (hipotez; beşgenin/yamuğun bir kenarı şeridin kalınlığından büyüktür şeklinde oldu). Dikkat edilirse ne veri toplama ne de hipotez görülmeyen bir diğer aday öğretmen de 5. aday öğretmendir. Öyleyse, doğru düşünce her zaman hipotez kurmaya bağlı değildir. Hipotezin 18 kişinin içinden sadece 3 kişi tarafından net olarak verilmesi matematiksel düşünce adımlarının net olarak yazılmamasından da kaynaklanıyor olabilir. Bu da örnek olan 5. kişinin cevabında hipotez kelimesine başvurmadan sonuca ulaşması ile açıklanabilir.

Tablo 2'de aday öğretmenlerin kullandıkları düşünce adımları görülebilir. Düşünce adımlarını belirlerken kişilerin şekille düşünmelerinin nasıl gerçekleştiği ve odak noktalarındaki matematik kavramlarının neler olduğuna dikkat edilmiştir. Örneklemdeki 5. kişinin cevabı örnek cevap olarak belirlenmiştir. İkizkenar yamuğu fark etmesi, bunun altıgenin de parçası olduğunu düşünce hatasına düşmemesi (açılar farklı oluyordu), dönme simetrisinden faydalanarak üst üste yamukları ve kenardaki dik üçgenlerin eşliklerini fark etmesi açısından diğer aday öğretmenlerin cevaplarından ayrılmıştır (Tablo 2). Dönme simetrisinden cevaplarda fazlaca yararlanılmaması dönme geometrisinin müfredata yeni eklenmiş olmasından ve aday öğretmenlerin de bu konuya istedikleri kadar hazır hissetmemelerinden kaynaklanabilir.

4, 16 ve 17. cevaplarda eksik matematiksel düşünme saptanmış, sadece 15. cevapta hatalı matematiksel düşünceye rastlanmıştır (Tablo 2). Buradaki hatalı düşünme beşgenin altındaki ikizkenar yamuğun altıgenin yarısı olan ikizkenar yamukla açı açısından aynı yamuğu oluşturmamasından kaynaklanmaktadır. Eksik matematiksel düşünmelerde ise ya düşünme yolu yarım bırakılmış ya da matematiksel doğrulukla net olarak belirtilmemiştir.

Tartışma ve Sonuç

Araştırmanın matematiksel düşünce gibi görselliğe uzak bilişsel hareketleri anlamaya biraz daha yaklaşmak için bir araç olarak görülebildiğini düşünebiliriz. Biliş öğrencinin genelde kendisine de kapalı olduğundan çoğunlukla farkına varmadan veya önsezi yoluyla bir noktaya çıkılmaktadır ki bu nokta da genelde bir ileri nokta olan sonuca bağlanmaktadır. Matematiksel düşüncenin bu bağlamda öğrencinin kendisine de daha gözlemlenebilir hâle geldiğini kabul edebiliriz.

Bu araştırmada matematiksel düşüncenin matematik kavramlarının kullanılma sıklığı ile ilgisine bakılmıştır. Cevaba sâhip olmayan aday öğretmenlerin güvenli sahada kalmak için fazla matematiksel kavram kullanmadığı görülmüştür. Yine de bağlantılı olabilecek kavramların (beşgen, üçgen, ikizkenar yamuk, paralelkenar, sin vs.) çoğu kullanılmıştır. Cevabın en doğru şekilde yazılabilmesi için gerekli olan anahtar kavramın (ikizkenar yamuk) çok az aday öğretmen tarafından kullanıldığı belirlenmiştir. Bu da matematiksel düşünce ağlarında bir kopukluk olarak nitelendirilebilir.

Kinestetik gösterim şeklinin tek başına kullanılmaması origaminin yeterince matematik eğitiminde kullanılmaması ile açıklanabilir. Sözel gösterim şeklinin matematikte bir yere kadar yardımcı olacağı aşikârdır; ama bu iki aday (7 ve 9) öğretmen tarafından fark edilmemiştir. Benzer şekilde sadece şekle bağlı kalarak da çözüme ulaşılmamıştır. Şekil ile başlayan veya şekille etkileşimle cevap arayan öğretmen adayları vardır. Ama görsel hayal güçlerine ve çizimlerine çok fazla güvenmemişlerdir. 18 aday öğretmen içinde en fazla 2'li gösterim şekli seçilmiştir (11 aday öğretmen tarafından). Bu sonuç ise alanyazındaki biliş yüklenmesi problemi ile açıklanabilir (Sweller, 1988). Sweller bazı matematik problemlerinin öğrenci için aşırı biliş yüklemesi ile sonuçlanabileceğini ve öğretim materyali tasarlamada bunun hesaba katılması gerektiğini belirtmiştir.

Origami matematik eğitiminde genelde küçük bir hoşluk, farklılık amacı ile kullanılmakta ama matematiksel düşünceyi geliştirebileceği hesaba katılmamaktadır. Oysa origami aslen matematiktir ve matematiksel düşünceyi bambaşka bir yoldan tetiklemektedir (Haga, Fonacier ve Isoda, 2008). Temel origami öğretildikten sonra öğrenci kendi ilgisi de olursa origamiyi matematiksel düşünce adımları oluşturmak için kullanabilmektedir. Veri toplama ve hipotez geliştirme aynı başlangıçtan farklı origami sonuçları çıkarmak için gerekir. Bu araştırmada yapılanlar herhangi bir origamics konusu ile tekrarlanabilir ve gösterim çeşitliliği, kavram bilgisi, kullanımı ve matematiksel düşünce adımları hakkında bilgi toplanabilir.

Araştırmanın durum değerlendirmesi olması ve az kişiyle tekrarlanmış olması ve araştırmacının tek yanlı olduğunu da bir limit olarak değerlendirmek te fayda vardır. Araştırma daha çok öğrenciyle ve farklı problem türleriyle gene yürütülmelidir. Problem verilirken özellikle ölçmenin kullanılmaması gibi sunum çeşitliliğine de puan verileceği belirtilebilir. Matematiksel açıklamalarını daha açık hâle getirmeleri için her düşündüklerini neden öyle düşünmüş olabileceklerini anlatmaları istenebilir. Fakat bunu sınıf ortamında istemenin bir faydası olmayacaktır. Çünkü zaman ve stres düşünme yollarını kapatabilmektedir. Tabii ki farklı yerlerden yararlandıkları düşünülebilir. Fakat örneklemi oluşturan kişiler öğretmenliğe bir sene uzaklığındadırlar ve sorumluluk alacakları beklenmelidir. Cevapları alırken oldukça açık uçlu bir yöntem uygulanması sorun olabilir; ama bununla başa çıkabilmek için en uygun yöntem daha kısıtlı bir cevap kâğıdı olsa da bu da düşünme adımlarının sınırlanması, değişik ve farklı yöntemlerinin görünürlüğünün ortadan kalkması ile sonuçlanabilir. Bunun için çözüm durum değerlendirmesi şeklindeki araştırmalarda daha açık uçlu yöntemlerin kullanılması şeklinde sınırlandırılabilir.

Kaynakça

Akayuure, P., Asiedu-Addo, S. K. ve Alebna, V. (2016). Investigating the effect of origami instruction on pre-service teachers' spatial ability and geometric knowledge for teaching. *International Journal of Education in mathematics, Science, and Technology, 4*(3), 198-209. doi:10.18404/ijemst.78424

Alkan, H. ve Bukova-Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25*(3), 221-236.

Altun, M. ve Alkan, H. (1999). 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10. bölümler. A. Özdaş,(Ed.), *Anadolu Üniversitesi Açık Öğretim Fakültesi İlköğretim Öğretmenliği Lisans Tamamlama Programı Matematik Eğitimi*. Eskişehir: Açık Öğretim Fakültesi Yayınları.

Arıcı, S. ve Aslan-Tutak, F. (2013). *Using origami to enhance geometric reasoning and Achievement.* Eight Congress of European Research in Mathematics Education (CERME)-WG 4, Antalya, Türkiye.

Arslan, O., Işıksal-Bostan, M. ve Şahin, E. (2013). Origaminin matematik eğitiminde kullanılmasına yönelik inanç ölçeği geliştirilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*(2), 44-57.

Arslan, O. (2012). *Investigating beliefs and perceived self-efficacy beliefs of prospective elementary mathematics teachers towards using origami in mathematics education.* Yayımlanmamış doktora tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi.

Çakmak, S. (2009). *An investigation of the effect of origami-based instruction on elementary students' spatial ability in mathematics.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi.

Çakmak, S., Işıksal, M. ve Koç, Y. (2014). Investigating Effect of Origami-Based Instruction on Elementary Students' Spatial Skills and Perceptions, *The Journal of Educational Research*, *107*(1), 59-68.
DOI: 10.1080/00220671.2012.

Çeziktürk, Ö. (2004). Origami çalıştayı. *MAT-DER konferansı*, Ankara.

Devlin, K. (2012). *Introduction to mathematical thinking*.
http://profkeithdevlin.com.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* ERIC ED 466 379 & SE 066 315.

Dündar-Koylahisar, T. (2012, Haziran). Özdeşliklerin modellenmesinde origami kullanımının öğrenci görüşlerine etkisinin incelenmesi. *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*.
http://kongre.nigde.edu.tr/xufbmek/dosyalar/tam_metin/tam_metin.htm.

Erktin, E., Özkan, A. ve Balcı, N. (2003). İlköğretim matematik sınıflarında kağıt katlama projesi. *EDU7, 1*(1), 1-8.

Ersoy, E. ve Güner, P. (2014). Matematik öğretimi ve matematiksel düşünce. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 3*(2), 102-112.

Fraivillig, J. L., Murphy, L.A. ve Fuson, K.C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in everyday mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2),148-170.

Haga, K., Fonacier, J. C. ve Isoda, M. (2008). *Origamics: Mathematical Explorations through paper folding.* Singapore: World Scientific Publishing Company.

Henningsen, M. ve Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Kahramaner, Y. ve Kahramaner, R. (2002). Üniversite eğitiminde matematik düşüncenin önemi. *İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 12*, 15-24.

Kılıç, H., Tunç-Pekkan, Z. ve Karatoprak, R. (2013). Materyal kullanımının matematiksel düşünme becerisine etkisi. *Eğitimde kuram ve uygulama dergisi*, *9*(4), 544-556.

MEB. (2013). *Ortaokul matematik dersi okul programı*, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. *http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx/program2.aspx?islem=1&kno=215*

Özgen, K. ve Bindak, R. (2011). Lise öğrencilerinin matematik okuryazarlığına yönelik öz-yeterlilik inançlarının belirlenmesi. *Kuram ve Uygulamada eğitim Bilimleri*, *11*(2), 1073-1089.

Polat, S. (2013). Origami ile matematik öğretimi. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 10*(21), 15-27.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. D. Grouws, (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* içinde (334-370). NewYork: McMillan.

Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important*? https://www.researchgate.net/publication/254408829.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science, 12,* 257-285

Sunay, Ç. (2008, Haziran). Basit ve eğlenceli bir sanat: Origami. *Bilim ve Teknik Dergisi Yıldız Takımı Eki*, *487*, 10-13.

Tataroğlu-Taşdan, B., Çelik, A. ve Erduran, A. (2013). Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ve öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesi hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *21*(4), 1487-1504.

Tuğrul, B. ve Kavici, M. (2003). Kâğıt katlama sanatı origami ve öğrenme. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(1), 1-18.

Wares, A. (2016). Origami boxes as a context for rich mathematical thinking. *STEM Teaching & Learning Conference*. Paper 1. http://digitalcummons.georgiasouthern.edu/stem/2016/2016/1.

Yıldırım, C. (2015). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitap